04/04/16.

"ΣΚΟΝΑΚΙ" (Για πριν την εξέταση)

(1) $A,B\subset\mathbb{R}^n$ J-μετρ ($\Rightarrow$ φραγμ) $\neq\emptyset$, $\mathring{A}\cap\mathring{B}=\emptyset$, $f:A\cup B\to\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{A\cup B} f=\int_A f+\int_B f$ (και f ολοκλ $\Rightarrow f|_A, f|_B$ ολοκλ)

(2) $B\subset\mathbb{R}^n$, J-μετρ, $f:B\to\mathbb{R}$ ολοκλ $\Rightarrow v(\underbrace{\Gamma_f}_{=\{(\bar{x},f(\bar{x})),\,\bar{x}\in B\}\subset\mathbb{R}^{n+1}})=0$

(3) $B\subset\mathbb{R}^n\neq\emptyset$, $f_1,f_2:B\to\mathbb{R}$, $f_1\leq f_2\Rightarrow v(\{(\bar{x},y)\in\mathbb{R}^{n+1}: f_1(x)\leq y\leq f_2(x)\})$

$=\int(f_2-f_1)$ [όπου $v(M)=\int_M 1$]

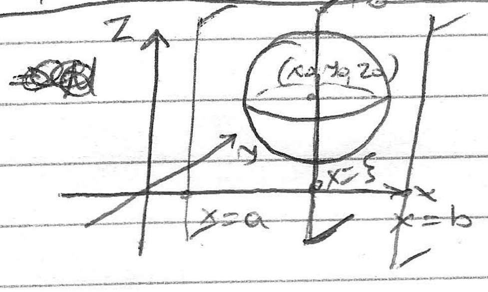
(4) (Cavalieri): $M\subset\mathbb{R}^n$, J-μετρ, M μεταξύ $x_1=\alpha$, $x_1=b$

$\forall\xi\in[\alpha,b]\ \exists\, \underbrace{v(M\cap\{x_1=\xi\})}_{(n-1)\text{-διαστ.}}=:q(\xi)\in[0,+\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{v(M)}_{n\text{-διαστ.}}=\int_\alpha^b q(\xi)\,d\xi$

Εφαρμογή της αρχής Cavalieri

: $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leq r^2\}$ ($r>0$)



$\Rightarrow$ η μπάλα M βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $x=x_0-r$ και $x=x_0+r$ (αφού $(x-x_0)^2\leq r^2\Rightarrow$ $\Rightarrow |x-x_0|\leq r\Rightarrow x_0-r\leq x\leq x_0+r$)

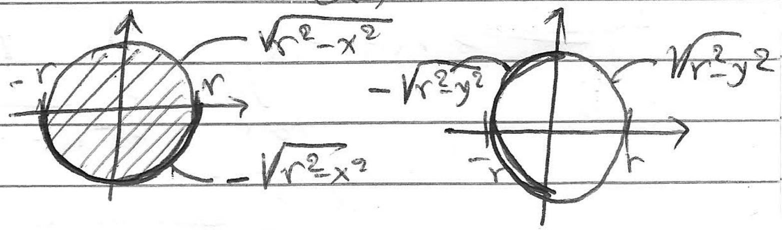
και η τομή της με το επίπεδο $x=\xi$ για $\xi\in[x_0-r,x_0+r]$ είναι το σύνολο $Q(\xi)=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2: (y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leq r^2-(\xi-x_0)^2\}$ δηλ ένας κλειστός κυκλικός δίσκος κέντρου (y_0,z_0) και ακτίνας $\sqrt{r^2-(\xi-x_0)^2}$ ο οποίος έχει εμβαδόν $\pi\cdot(r^2-(\xi-x_0)^2)\Rightarrow$

$\xrightarrow{\text{Cavalieri}} v(M)=\int_{x_0-r}^{x_0+r}\pi(r^2-(\underbrace{\xi-x_0}_{t})^2)\,d\xi=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-t^2)\,dt=2\pi\int_0^r(r^2-t^2)\,dt$

$=2\pi(r^3-\frac{r^3}{3})=\frac{4\pi}{3}r^3$

Γιατί η μπάλα M είναι J-μετρήσιμη; — (3) αφού σύμφωνα με αυτό, το $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in B : f_1(x,y)\le z\le f_2(x,y)\}\subset\mathbb{R}^3$ είναι J-μετρ. αν $f_1,f_2: B\to\mathbb{R}$ είναι ολοκλ., $f_1\le f_2$ και $B\subset\mathbb{R}^2$ είναι J-μετρ. Εδώ: $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le r^2\}=$
$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in\Delta,\ f_1(x,y)\le z\le f_2(x,y)\}$
όπου $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\}$ και παίρνω
$f_1(x,y)=z_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$ $\quad f_2(x,y)=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$
με $\Delta\subset\mathbb{R}^2$ J-μετρ. και συμπαγές (?) και $f_1,f_2:\Delta\to\mathbb{R}$ συνεχείς $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ολοκλ. (κλειστές μπάλες $\Rightarrow$ συμπαγείς)
Επίσης $\overset{(3)}{\Rightarrow} v(M)=\int_\Delta f_2-f_1 = 2\int_\Delta \sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}\,d(x,y)$

Πώς υπολ. το $\underset{\overset{\text{ορ}}{=}\int_M 1\,d(x,y,z)}{v(M)}=\int_\Delta\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}\,d(x,y)$



(5) **Ορισμός**: Αν $\varphi_1,\varphi_2:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς ($\varphi_1\le\varphi_2$) σ' ένα υποσύνολο της μορφής
$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[\alpha,b],\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ λέγεται κανονικό χωρίο ως προς τον άξονα x.
Αντίστοιχα για y: Αν B κανονικό χωρίο ως προς x' κ' y το λέμε ~~κα~~ κανονικό χωρίο.
Τότε:
Πρόταση: Κανονικά χωρία ως προς x (αντ. ως προς y) είναι J-μετρήσιμα κ' συμπαγή (δηλ. κλ. κ' φραγμ.)
Απόδειξη: (3) Αφού το (κλειστό) $[\alpha,b]$ είναι J-μετρήσιμο (στο $\mathbb{R}$) και συμπαγές και φ_1,φ_2 συνεχείς, αυτές είναι ολοκλ. (Lebesgue)
$\overset{(3)}{\Rightarrow}$ το B είναι J-μετρήσιμο. Επίσης είναι φραγμένο και κλειστό.
Έστω ακολ. $(x_n,y_n)\in B$ και $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. ($\iff x_n\to x_0,\ y_n\to y_0$)
Θ.δ.ο. $(x_0,y_0)\in B$.
Τότε $(x_n)\in[\alpha,b]$ με $x_n\to x_0\in\mathbb{R}$ $\overset{[\alpha,b]\text{ κλ.}}{\Rightarrow}$ $x_0\in[\alpha,b]$
Επίσης, αφού φ_1,φ_2 συνεχείς έχουμε $\varphi_1(x_n)\le y_n\le\varphi_2(x_n)$

$\boxed{\varphi_1(x_0) \le y_0 \le \varphi_2(x_0)}$ (αφού $x_n \to x_0$ κ' φ_1, φ_2 συνεχείς)

Άρα Πρόταση: Έστω $B \subset \mathbb{R}^2$ κανονικό χωρίο ως προς τον άξονα των x και $f: B \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Τότε $\exists \int_B f = \int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$

$\boxed{\text{Εφαρμογή}}$: $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le r^2\} =$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[x_0-r, x_0+r] \wedge \underbrace{y_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}_{\varphi_1(x)} \le y \le \underbrace{y_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}_{\varphi_2(x)}\}$$

(δηλ. Δ: κανονικό χωρίο ως προς x) $\Rightarrow$ Δ: J-μετρ. $\Rightarrow$ συμπαγές.

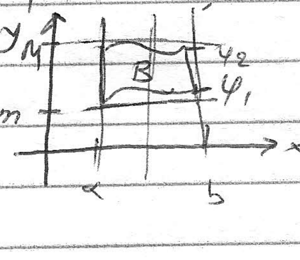
Προτ. $\Rightarrow$ $$v(M) = 2\int_{x_0-r}^{x_0+r}\int_{y_0-\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}^{y_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}} \sqrt{r^2-(x-x_0)^2-\underbrace{(y-y_0)}_{\eta}^2}\,dy\,dx =$$

$$=4\int_{x_0-r}^{x_0+r}\int_0^{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}} \sqrt{r^2-\underbrace{(x-x_0)}_{\xi}-\eta^2}\,d\eta\,dx =$$

$$=8\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-\xi^2}} \sqrt{r^2-\xi^2-\eta^2}\,d\eta\,d\xi = \dots = \frac{4\pi}{3}r^3$$

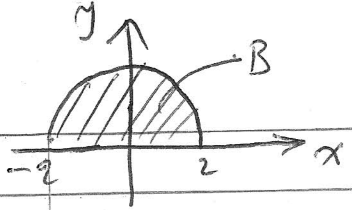
Απόδειξη: (α) $\exists \int_B f \in \mathbb{R}$: Lebesgue κ' B: κανονικό χωρίο ως προς x.

(β) $\left.\begin{array}{l}\exists\, m = \min \varphi_1 \\ M = \max \varphi_2\end{array}\right\} \Rightarrow B \subset [a,b]\times[m,M]$



(c) Fubini.

$\boxed{\text{A. 127}}$ (α) Υπολόγισε το ολοκλήρωμα και σχεδίασε το πεδίο ολοκλ.
$\int_B x^2y\,d(x,y)$, B να είναι το άνω μέρος του κυκλικού δίσκου ακτίνας 2 κέντρου $(0,0)$.



<u>Λύση</u>: Αφού ~~$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-2,2]\wedge$~~

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-2,2]\wedge 0\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$

είναι κανονικό χωρίο ως προς x και $f(x,y)=x^2y$ συνεχής

έχουμε από <u>Προτ</u> $\Rightarrow \int_B x^2y\,d(x,y)=\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} x^2y\,dy\,dx=$

$$=\int_{-2}^{2} x^2\frac{4-x^2}{2}\,dx=\int_0^2 x^2(4-x^2)\,dx=4\cdot\frac{2^3}{3}-\frac{2^5}{5}=\ldots=\frac{64}{15}$$